

文章编号: 1001- 4322(2001)03- 0261- 06

横向剪切干涉的波前重构新方法

许晓军, 陆启生, 刘泽金, 舒柏宏

(国防科技大学 理学院, 湖南 长沙 410073)

摘 要: 在常规横向剪切干涉仪的基础上, 利用波前周期延拓的假设, 基于小波变换的方法实现了波前重构。这种波前复原实现了光滑波前的快速重构, 并且能够较好地快速重构非模式波前。数值模拟表明, 该方法对波前复原的精度优于常规多项式拟合方法。利用该方法在不均匀介质对波前的扰动的测量重构表明, 重构波前比常规多项式拟合重构波前合理。

关键词: 剪切干涉; 周期延拓; 小波变换; 波前重构

中图分类号: O 437

文献标识码: A

横向剪切干涉仪 (lateral shear interferometer- LSI) 以其系统灵活简单, 对环境的要求低等特点, 在波前检测上得到了广泛的应用^[1,2,3]。常规的波前重构都是在假设波前相位分布为一光滑函数的条件下利用多项式拟合^[4], 在重构算法和信息的完整性方面存在着较大的缺陷^[5,6]。文献[5]利用剪切干涉仪的合成进行了波前重构的实验; 文献[6]在此基础上提出了波前延拓剪切干涉 (wavefront prolongation shear interferometer- WPSI), 并证明了可行性。但利用 LSI 的合成, 需要 3 个以上的 Mach-Zehnder 型干涉仪进行级联, 装置比较复杂。尽管 WPSI 解决了常规 LSI 的困难, 但同时却失去了 LSI 系统灵活简单等优点。如何在不改变常规剪切干涉的条件下, 寻找一种能够利用现有剪切干涉所携带的波前信息, 比较好地重构波前的数学方法, 便是本文的一个出发点。从数学形式上考察剪切干涉, 可以发现 LSI 的测量是波前的差分在某些特定位置的采样值, 即波前函数在单一尺度下两个位置的差值。若将这个差分值进行小波变换则我们可以得到波前函数在多个尺度下不同位置的差值, 即波前差分的小波变换系数。如果寻找到某种线性变换将这些小波变换系数在考察的尺度范围内进行重组, 得到波前函数在特定尺度范围内的小波变换系数, 再利用逆小波变换便可重构出特定尺度范围内的波前。当然, 这样便可以根据波前测量所需要的精度来决定尺度的范围。

1 剪切干涉与小波变换

1.1 剪切干涉

为简单起见, 考虑一维情形。假设波前函数为 $W(x)$, $0 \leq x \leq D$, 剪切量为 s 。则由 LSI 剪切干涉后可以测得波前的差分值

$$\Delta W(x) = W(x) - W(x - s), \quad s \leq x \leq D \quad (1)$$

利用条纹识别技术, 可以得到 $\Delta W(x)$ 的采样值。离散情况下, 假定 $\Delta W(x)$ 在 $s \leq x \leq D$ 的采样值为 $\Delta W_0, \Delta W_1, \dots, \Delta W_{N-s-1}$, 则与之对应的 $W(x)$ 在 $0 \leq x \leq D$ 采样为 $W_0, W_1, \dots, W_{N-k}, \dots, W_{N-1}$, $[0, s]$ 上有 S 个采样点。则方程 (1) 离散为

$$\Delta W_i = W_{i+s} - W_i, \quad i = 0, \dots, N - S - 1 \quad (2)$$

易知, (2 式) 为一 S 阶差分方程, 需已知 $W(x)$ 在 S 个点上的值才可以完全求解。

常规波前重构假定 $W(x)$ 为一光滑函数, 则 $W(x)$ 可以由一组正交多项式 $P_n(x)$ 展开^[4], 即

$$W(x) = \sum_i C_i P_i(x), \quad \Delta W(x) = \sum_i C_i [P_i(x) - P_i(x - s)] \quad (3)$$

收稿日期: 2000-05-21; 修订日期: 2001-02-15

基金项目: 国防预研基金资助课题

作者简介: 许晓军(1973-), 男, 讲师, 博士, 从事气动光学研究。



利用最小二乘法从 ΔW_i 拟合得系数 C_i , 从而重构波前 $W(x)$ 。实际上, 已知 $W(x)$ 在 S 个点上的值是很难做到的, 并且某些情况下波前并不是光滑函数, 还有可能为突变函数, 例如平面波从某粗糙表面反射, 光束通过流场空间^[7,81]等。另外, 多项式拟合还有能否收敛及收敛速度等问题。针对这些实际情况, 考虑到小波分析在突变信号处理中的成功应用, 我们尝试利用小波变换实现剪切干涉的波前重构。

1.2 小波变换与波前剪切

设小波母函数、小波父函数(尺度函数)分别为 $\Psi(x)$ 和 $\mathcal{Q}(x)$ ^[9]。考虑二进小波有

$$\Psi_{n,k}(x) = 2^{n/2} \Psi(2^n x - k) \quad (4)$$

且 $\Psi(x)$ 和 $\mathcal{Q}(x)$ 满足如下关系

$$\mathcal{Q}(x) = \sqrt{2} \sum_k h_k \mathcal{Q}(2x - k), \quad h_i = 1, \quad \Psi(x) = \sqrt{2} \sum_k g_k \mathcal{Q}(2x - k), \quad g_i = 0 \quad (5)$$

由小波的性质可知, $\{\Psi_{n,k}(x)\}$ 构成函数空间的标准正交基, 则

$$f(x) = \sum_{n,k} d_k^{(n)} \Psi_{n,k}(x) \quad (6)$$

其中, $\{d_k^{(n)}\}$ 为 $f(x)$ 在小波基为 $\Psi_{n,k}(x)$ 下的小波变换系数。

在信号为离散情况下, Mallat 为小波变换构造了一种类似 fast Fourier transform (FFT) 的快速线性运算, 即离散小波变换(discrete wavelet transform - DW T)^[10]。基本思想为: 利用实验采样离散值 f_k 构造函数 $f(x)$, 即

$$f(x) = \sum_k f_k \mathcal{Q}(x - k) \quad (7)$$

令 $c_k^{(0)} = f_k$, 结合(4)、(5)、(6)三式, 可以推出

$$c_k^{(1)} = \sum_p h_{p-2k} c_p^{(0)}, \quad d_k^{(1)} = \sum_p g_{p-2k} c_p^{(0)} \quad (8)$$

将 $c_k^{(1)}$ 替代 $c_p^{(0)}$ 重复进行上式运算, 依次下去得到 $\{f_k\}$ 的 DW T 系数 $\{d_k^{(n)}\}$, 这就是著名的 Mallat 分解算法^[10]。由(5)式 $\{h_i\}$ 、 $\{g_i\}$ 的取值可知, (8)式中 $\{c_k^{(1)}\}$ 保存了 $\{c_p^{(0)}\}$ 的低频成分, 而 $\{d_k^{(1)}\}$ 保存了 $\{c_p^{(0)}\}$ 的高频成分, 即(8)式实现了对 $\{c_p^{(0)}\}$ 的低高通滤波。另外, 由于 $\{c_k^{(1)}\}$ 、 $\{d_k^{(1)}\}$ 又分别是 $\{h_i\}$ 、 $\{g_i\}$ 与 $\{c_p^{(0)}\}$ 的卷积, 则 $\{c_k^{(1)}\}$ 、 $\{d_k^{(1)}\}$ 又包含了 $\{c_p^{(0)}\}$ 的分布位置信息。DW T 的逆运算 IDW T 只要将该过程颠倒, 即

$$c_k^{(0)} = \sum_n h_{k-2n} c_n^{(1)} + \sum_n g_{k-2n} d_n^{(1)} \quad (9)$$

通常情况下, 离散小波取有限支撑小波, 即 $\{h_i\}$ 和 $\{g_i\}$ 只有有限个值不为 0, 如 Daubechies 小波^[12]。很明显, DW T 为线性运算, 可以用一矩阵表示, 设一维 DW T 分解算子矩阵为 M_w , 已证明 M_w 为正交矩阵, 则 IDW T 的算子矩阵为 M_w^T 。设一维离散信号为矢量 F , 则 Mallat 算法及逆运算的矩阵表示为

$$\tilde{F} = M_w F, \quad F = M_w^T \tilde{F} \quad (10)$$

设 A 为二维待变换信号, 则二维 DW T 的矩阵表示为

$$\tilde{A} = M_w A M_w^T \quad (11)$$

将小波变换用于剪切干涉, 先对 $W(x)$ 进行小波变换, 有

$$W(x) = \sum_{n,k} d_k^{(n)} \Psi_{n,k}(x) \quad (12)$$

可以推得

$$\Delta W(x) = \sum_{n,k} d_k^{(n)} [\Psi_{n,k}(x) - \Psi_{n,k}(x - s)] = \sum_{n,k} q_k^{(n)} \Psi_{n,k}(x) \quad (13)$$

其中

$$q_k^{(n)} = d_k^{(n)} - d_k^{(n)} 2^n s \quad (14)$$

比较(3)式与(13)式可以发现, 利用正交多项式拟合, 是在单一尺度下正交多项式的两个位置的差函数来拟合波前差分值; 而小波变换是利用各种尺度下对应位置的小波函数差来分解波前差分值, 这个分解过程也是小波变换。并且 $W(x)$ 、 $\Delta W(x)$ 的小波变换系数存在如(14)式的关系, 即由 $W(x)$ 的小波变换系数在各种不同尺度下对应位置的差值可以得到 $\Delta W(x)$ 的小波系数。则波前重构的思路为

$\Delta W(x) \xrightarrow{\text{sampling}} \Delta W_i \xrightarrow{\text{DWT}} q(n, k) \xrightarrow{?} d(n, k) \xrightarrow{\text{DWT}} W(x)$ 。关键问题是小波变换系数重组能否实现, (14) 式的逆运算是否存在。

2 波前重构

实际情况下, 剪切干涉的测量值为 $\Delta W(x)$ 的采样值 ΔW_i , 记 $\Delta W = [\Delta W_0, \dots, \Delta W_{N-S-1}]^T$ 为其矢量表示, 与之对应的重构波前在采样点上的值的矢量形式为 $W = [W_0, \dots, W_{N-S-1}]^T$, 则有

$$\Delta W = S_w W \tag{15}$$

其中 S_w 为 LSI 的剪切矩阵。简单的推导可知 $|S_w| = 0$, 即 S_w 不可逆。由于 DWT 为线性运算, 对 (15) 式两边同时进行 DWT, 所得 S_w 的二维 DWT 矩阵也不可逆。也就是说, ΔW 的小波变换系数的精确重组在常规 LSI 下是不可能的。正因为 S_w 不可逆, 文献 [6] 提出了 WPSI, 实现了波前的完全重构。主要原因是对波前进行了周期延拓, 引入了波前延拓剪切干涉矩阵 S_{WP} 。已经证明 S_{WP} 在很多剪切条件下是可逆的, 当然 S_{WP} 二维 DWT 矩阵也可逆。受这种思想的启发, 在常规 LSI 不改变硬件的条件下, 将测得的 ΔW 进行延长, 简单起见令 $\Delta W_i = 0$, 得 $\Delta W^p = [\Delta W_0, \Delta W_1, \dots, \Delta W_{N-S-1}, 0, \dots, 0]^T$ 。如果剪切矩阵采用周期延拓剪切矩阵 S_{WP} , 由于 ΔW^p 的延长任意性, 而 ΔW^p 的取值对 W 的各点的取值都有影响, 这样重构出的 W 必定是不稳定的, 因而直接利用 $S_{WP}^{-1} \Delta W^p$ 重构是行不通的。考虑到信号的 DWT 既能反映信号的频率分布信息, 又能记录信号的位置信息。将 ΔW^p 进行小波变换得 $\Delta \tilde{W}^p$, 即

$$\Delta \tilde{W}^p = M_w \Delta W^p \tag{16}$$

可见, 由于 ΔW^p 的延长造成信号的拐点, 故 $\Delta \tilde{W}^p$ 的小尺度 (“高频”) 成分中, 延长起点位置对应的 “频率” 值较大, 但由于该拐点接近信号的端点, 而一般非零信号的端点的小波变换系数也较大。如果处理中将信号任意延长部分在高频区段对应的 “频率” 值置 0, 就可以基本消除由于 ΔW^p 的延长所带来的小尺度的影响。因 DWT 将信号的 “低频” 成分 (光滑部分) 压缩在小波系数的前部很少的点中, 一般取小波系数的前 $N/8$ 个点就可以很好重构信号的低频部分, 故 ΔW^p 的延长所带来的低频影响可以忽略。因而在算法中, 通常利用 $\Delta \tilde{W}^p$ 的前 m ($m = N/8$) 个点, 即 $\Delta \tilde{W}_m^p$ 来近似 $\Delta \tilde{W}^p$, 当波前为光滑函数时, $N/16$ 已经足够。图 1 给出了波前函数为 $\sin(\pi^2 x^2) \cdot x$ 的剪切延长前后的小波系数, 其中 $N = 128, S = 11, M_w$ 取 DAUB20 小波^[12]。很明显, 由于 $\sin(\pi^2 x^2) \cdot x$ 为光滑函数, 其剪切延长后的小波变换的 “高频” 成分 (系数的左侧) 绝大多数接近 0。还可看出, 小波系数的前 $N/8$ 即 16 个系数值已经涵盖了信号 DWT 的大部分信息, 并且从 65-128, 33-64, 17-32, ... 各个尺度中可以看出端点的小波系数值已经淹没了由于延长所

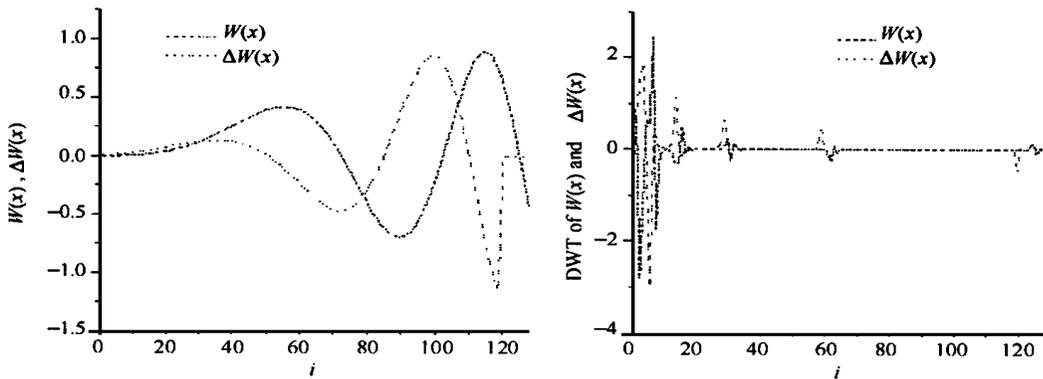


Fig 1 The plot of function $W(x)$ and $\Delta W(x)$ with their DWT

图 1 函数 $W(x)$ 和 $\Delta W(x)$ 及其离散小波变换曲线

引起的系数变化。在 ΔW^p 的延长假设下, 方程 (16) 的 DWT 形式为

$$\Delta \tilde{W}^p = (M_w S_{WP} M_w^T) \tilde{W}^p = \tilde{S}_{WP} \tilde{W}^p \tag{17}$$

其中 $\tilde{S}_{WP} = (M_w S_{WP} M_w^T)$ 为 S_{WP} 的二维 DWT。显然, 通过对 (17) 式的 N 阶线性方程求解即可实现重构。

在文献[6]中可以发现,波前延拓剪切干涉矩阵为一稀疏矩阵,其非零元素集中在反对角线附近。通过数值计算发现, $(\tilde{S}_{W P})^{-1}$ 仍为稀疏矩阵,一个带状矩阵,图2为矩阵 $(\tilde{S}_{W P})^{-1}$ 的取值,其中 M_w 为 128×128 的 DAUB20 算子^[11]。可以发现, $(\tilde{S}_{W P})^{-1}$ 的取值,前 $N/8$ 列占了主体。如果 \tilde{W}_m^p 能够较好地近似 \tilde{W}^p ,我们可以取 $(\tilde{S}_{W P})^{-1}$ 的前 $N/8 \times N/8$ 的子矩阵来实现方程(17)。幸运的是,这个条件可以满足(如图1)。在以上的假定与分析下,方程(17)简化为

$$\tilde{W}_m^p = (\tilde{S}_{W P})_m^{-1} \times_m \Delta \tilde{W}_m^p \quad (18)$$

其中 m 为简化的阶数,以上讨论 m 取 $N/8$

基于小波变换的波前重构(LSWT)方法为:

$$\Delta W(x) \xrightarrow{\text{sampling}} \Delta W \xrightarrow{\text{prolongation}} \Delta W^p_{i(i=0, \dots, N-1)}$$

$$\xrightarrow{\text{DWT}} \Delta \tilde{W}^p \xrightarrow{\text{filter } N/8} \Delta \tilde{W}_m^p \xrightarrow{(\tilde{S}_{W P})_m^{-1} \times_m} \tilde{W}^p \xrightarrow{\text{supplied by 0}} \tilde{W}^p \xrightarrow{\text{DWT}} W_p \xrightarrow{\text{revert}} W(x)。$$

3 数值模拟

3.1 非模式波前的快速重构

数值试验中令待测波前函数为 $W(x) = \sin(\pi^2 x^2) \cdot x$ 。将 $\Delta W(x)$ 进行采样,采样点数为 $N-S$,剪切量 s 取为 S 个点,添0后构成 ΔW^p ,其中 $N = 128, S = 11$ 。构造周期延拓剪切矩阵 S_{WP} 及其DWT矩阵 \tilde{S}_{WP} ,小波函数取DAUB20小波^[11]。从以上分析可知,对于光滑波前函数,DWT有很好的“压缩”能力,运算中,取 $m = N/8$ 。由于DWT、IDWT为快速运算,故重构的运算量主要在于求解(17)式的 m 阶线性方程组,计算时采用SVD(奇异值分解)方法。在前面的分析中已经知道,一般 m 取小于 $N/8$ 个采样点,运算量大大降低。而对于常规多项式拟合,如果拟合阶数为 l ,则需要利用SVD方法求解一个 l 阶最小二乘法问题,如果 $l = m$, l 阶最小二乘法问题的运算量远大于 m 阶线性代数方程组问题。一般情况下对于波前为光滑函数情形, m 取 $N/16$ 就能很好地重构,因而对于光滑波前,LSWT是一种快速算法。图3给出了 $l = m = N/16$,LSWT与多项式对 $W(x)$ 重构的比较,直观可以看出,在快速运算的情况下,LSWT的重构误差比多项式重构小。图3还给出了 $m = N/8$ 的LSWT重构,可见,随着 m 的增加,重构的偏差会大大减小,此时偏差主要出现在信号的两端,主要是由于简单“高频”过滤所造成的。

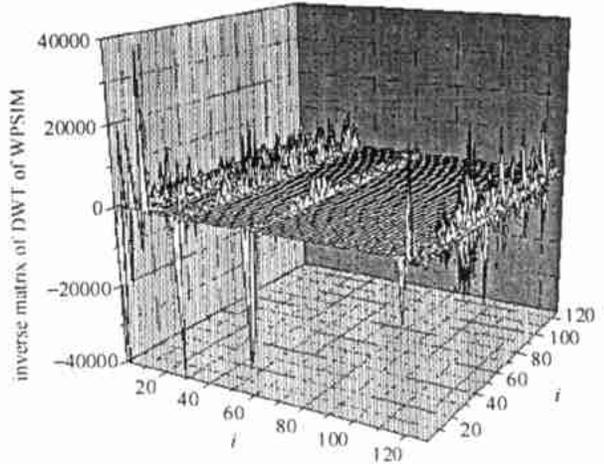


Fig 2 The surface plot of inverse matrix of DWT of WPSM
图2 矩阵WPSM的离散小波变换后的逆矩阵

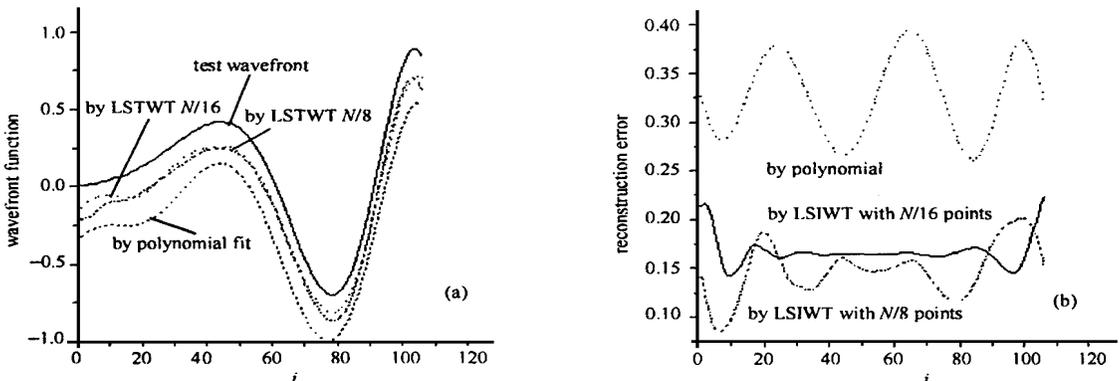


Fig 3 Comparison of wavefront reconstruction by LSWT (a) and polynomial (b) fitting of $\sin(\pi^2 x^2) \cdot x$

图3 待测波前函数 $\sin(\pi^2 x^2) \cdot x$ 在 LSWT (a) 和多项式 (b) 拟合下的重构比较

3.2 突变波前的重构

小波分析作为一个信号处理的有用工具, 尤其在突变信号处理中得到了极为广泛的应用。在实际波前测量中, 许多情形波前为突变函数, 如光束从某粗糙光学表面反射, 光束通过强湍流后的 phase-dislocation^[7,8]等。这些突变波前的剪切干涉条纹在通过多项式拟合时在收敛性问题上很难解决, 能否利用小波分析来解决这一困难便是本节数值模拟要说明的。数值模拟的方法同 3.1 节, 取 $N = 128, S = 11$ 。突变函数取三角形函数 $\text{Tri}(x)$ 。重构前后的函数图形及重构误差见图 4。从直观比较可以看出, 对突变波前, 多项式拟合有时不能很好地重构, 而 LSWT 能够比较好地重构, 且 LSWT 的运算量比较小。

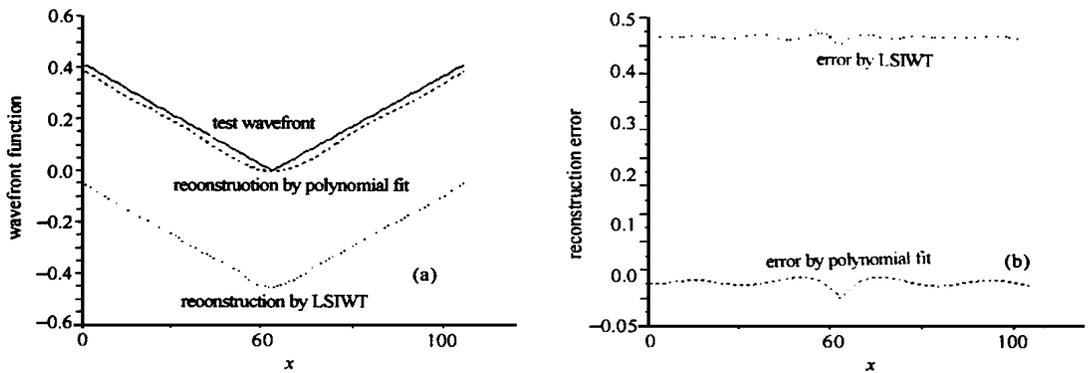


Fig. 4 Comparison of wavefront reconstruction by LSWT (a) and polynomial (b) fitting of $\text{Tri}(x)$

图 4 三角函数 $\text{Tri}(x)$ 的 LSWT (a) 和多项式 (b) 拟合重构比较

4 应用

在流场的光学不均匀性测量中, 往往通过对通过流场的光束的波前畸变的测量, 反推出流场的密度分布。我们利用剪切干涉仪对气动窗口的流场不均匀性进行了测量。气动窗口的流场方向由下往上, 设为 y 方向, 与剪切干涉仪的剪切方向相同。气动窗口大小为 $30\text{mm} \times 30\text{mm}$, 剪切量设为 0.5mm 。测得流场启动前后的剪切干涉条纹如图 5。

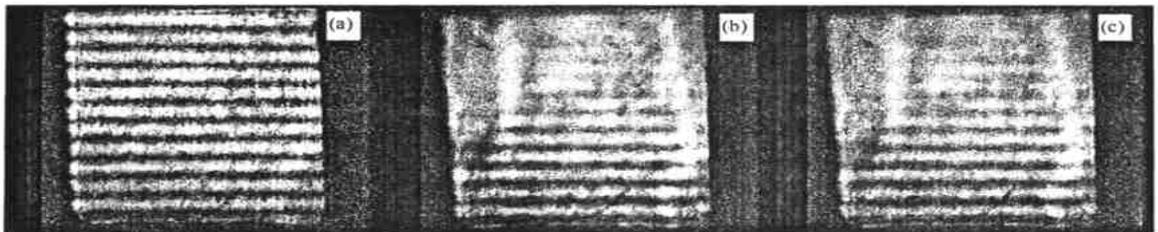


Fig. 5 Shear interference patterns with $s = 0.5\text{mm}$ in 0s(a), 1.4s(b), 2.32s (c)

图 5 0(a)、1.4(b)、2.32(c) 秒时刻 $s = 0.5\text{mm}$ 剪切干涉图形

由气动窗口的流场性质可知, 窗口中在左右两侧壁存在边界层流, 窗口中心区主要为激波和膨胀波, 故流场中心区域的密度变化主要在 y 方向上, 即中心区域的畸变波前为 y 的一维函数 $W(x, y) = W(y)$ 。通过对条纹的光滑滤波和极值位置的处理, 可以得到扰动波前差分值在标准条纹位置的采样值 $\Delta W(y_i)$, 见图 6(a)。图 6(b) 分别给出了利用多项式和 LSWT 重构的一维波前。重构过程中由于标准条纹的测量误差, 对标准条纹位置的采样值 $\Delta W(y_i)$ 进行了插值计算。从重构的波前来看, 二者都反映了波前的大尺度倾斜信息, 但多项式重构很难反映出波前小尺度畸变, 并且随条纹采样点的影响较大, 而 LSWT 可以更多地复原待测波前的信息且比较稳定。

5 结论

常规横向剪切干涉仪 (LSD) 的波前重构虽然具有结构简单, 对环境要求低等优点, 但重构算法有其

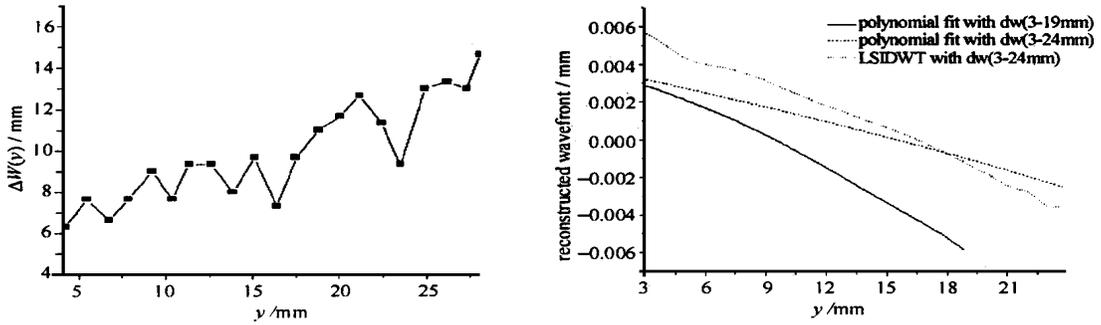


Fig. 6 The sampling (a) of $\Delta W(y)$ and reconstructed (b) wavefront

图 6 $\Delta W(y)$ 的采样(a)和重构(b)波前

局限性。周期延拓剪切干涉仪(WPSI)解决了这一局限性,但在一定程度上复杂了装置。针对这一情况,我们从重构算法入手,分析了小波分析在对信号处理中的成功应用,提出利用小波变换进行波前重构的设想。在重构中结合周期延拓剪切干涉的思想,在假设波前周期延拓剪切的前提下,利用周期延拓剪切矩阵成功实现了基于小波变换的对光滑波前的快速重构,同时也实现了对突变波前的快速重构。

通过与常规LSI的多项式拟合的重构算法的数值模拟和在不均匀介质对波前扰动测量中的应用比较表明,基于小波变换的波前重构算法计算速度快、重构精度高。

参考文献:

- [1] Rinmer M P, et al. Evaluation of large aberrations using a lateral shear interferometer having variable shear[J]. *App Opt*, 1975, **14**(1): 142-150
- [2] Welsh B M, et al. Fundamental performance comparison of a Hartmann and a shearing interferometer wavefront sensor[J]. *App Opt*, 1995, **34**(21): 4186-4195
- [3] Spooen Rudie, Dyrseth A strid A ksnes, V az Mario. Electronic shear interferometry application of a (double-) pulsed laser[J]. *App Opt*, 1993, **32**(25): 4719-4727
- [4] Daniel M alacara. Optical Shop Testing[M]. John Wiley & Sons, Inc. 1978
- [5] Shekhtan V N, Rodionov A Au, Pelmenev A G. Reconstruction of a light beam wavefront by synthesis of a shear interferogram [A]. *High Power Lasers: Science and Engineering* [C]. 1996, Edited by R. Kossovsky et al., 1996. 433-447.
- [6] Xu Xiaojun, et al. Mathematics and numerical simulation of shear interference with prolongation of wavefront[J]. *ACTA Optica Sinica*, 2000, **20**(2): 214-218
- [7] David L Fried, et al. Branch cuts in the phase function[J]. *App Opt*, 1992, **31**(15): 2865-2872
- [8] Valerii V Voitsekhovich, et al. Density of turbulence-induced phase dislocations[J]. *App Opt*, 1998, **37**(21): 4525-4535
- [9] Beylkin G, Coifman R, et al. Wavelets and their applications[M]. *Cambridge Jones and Bartlett*. 1992
- [10] Mallat S. Multi-resolution representation and wavelets[D]. Philadelphia: University of Pennsylvania, 1988
- [11] Daubechies I. Wavelets[M]. Philadelphia: SIAM Pub, 1992

A new algorithm for phase retrieval by lateral shear interferometer

XU Xiao-jun, LU Qi-sheng, LU Ze-jin, SU Bo-hong

(Institute of Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract On the assumption of wavefront prolongation, a new optical phase retrieval algorithm by conventional lateral shear interferometer with wavelet transform is introduced. With this method, the device remained the same, but the fast reconstruction of smooth wavefront as well as rough wavefront is realized. By computer simulation, its reconstruction precision is better than the polynomial fitting. In the measurement of inhomogeneous media, its result is reasonable.

Key words: shear interferometer; wavelet transform; wavefront prolongation; phase retrieval