

# 用 SHG-FROG 方法测量超短光脉冲的振幅和相位<sup>\*</sup>

龙井华<sup>1,2</sup> 高继华<sup>3</sup> 巨养锋<sup>1,2</sup> 阮双琛<sup>1</sup>

(1 深圳大学深圳市激光工程重点实验室, 深圳 518060)

(2 中国科学院西安光学精密机械研究所, 西安 710068)

(3 深圳大学理学院, 深圳 518060)

**摘要** 介绍了二次谐波振荡-频率分辨光学快门(SHG-FROG)测量超短脉冲的实验系统和二维相位恢复算法, 这种方法可以实现对超短脉冲振幅和相位的完全测量. 利用矩阵方法数值模拟了几种常见超短脉冲的 SHG-FROG 迹线, 并用主元素广义投影算法(PCGPA)从这些无噪音的 SHG-FROG 迹线中恢复了脉冲的振幅和相位, 误差接近收敛的标准. 研究结果表明, 这种测量方法结构简单, 算法可靠, 是测量超短脉冲的理想方法之一.

**关键词** 超短脉冲; 脉冲测量; 频率分辨光学快门; 相位恢复

## 0 引言

近几年, 超短光脉冲产生技术取得不断进步, 它在物理、化学、生物等领域的应用也不断发展, 此时, 精确测量超短脉冲的振幅和相位变得非常重要. 但是传统的自相关技术无法全面和准确地测量超短脉冲的振幅和相位. 在许多新型超短脉冲测量方法中, 基于时频技术的频率分辨光学快门(frequency resolved optical gating, 简称 FROG)能够严格、全面地测量脉冲的振幅和相位, 目前, 已经可以用来测量各种波长和能量的脉冲<sup>1,2</sup>.

FROG 包括实验和算法. 实验部分是将待测脉冲经分束器后形成的两个具有相对时间延迟的脉冲在非线性介质中混合, 相互作用产生一个在系列时间段内频率分辨的信号脉冲, 用光谱仪和 CCD 将其记录为强度随频率和时间延迟变化的空间图形, 称为 FROG 迹线(FROG trace)<sup>3</sup>.

两脉冲的相互作用可以基于各种瞬时响应的非线性光学过程, 其中基于二阶非线性效应的二次谐波产生-频率分辨光学快门(SHG-FROG)较为常用, 对脉冲能量水平要求低, 测量动力范围高, 尤其适合测量小于 10fs 的光脉冲<sup>4-8</sup>. FROG

方法的第二部分是利用二维相位恢复算法, 从 FROG 迹线中恢复脉冲的振幅和相位分布. 二维相位恢复算法利用傅里叶变换和傅里叶反变换交替迭代计算, 并结合频域限制和时域限制, 对猜测信号进行反复修改, 最终获得待测的信号, 理论证明此算法能使误差函数减小<sup>9</sup>. 目前基于这种迭代傅里叶变换形成了不同的算法方案, 典型的算法是广义投影(GP)算法<sup>10</sup>和广义主元素投影(PCGP)算法<sup>11</sup>.

## 1 SHG-FROG 测量系统和二维相位恢复算法

SHG-FROG 实验测量系统建立在传统自相关仪的基础之上, 用光谱仪和 CCD 取代光探测器. 其结构如图 1 所示. 探测脉冲(Probe)和快门脉冲(Gate)经过倍频晶体产生的二次谐波信号为

$$E_{\text{sig}}(t, \tau) = E(t)E(t - \tau) \quad (1)$$

FROG 迹线的数学表达式为<sup>3</sup>

\* 教育部高等学校骨干教师资助计划资助项目(项目编号:2000-30)

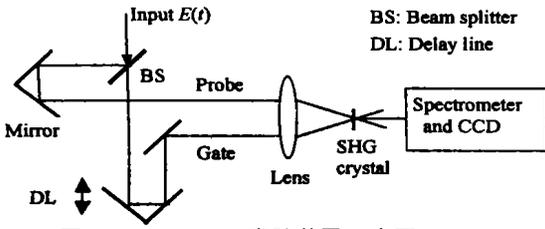


图1 SHG-FROG 实验装置示意图

Fig.1 Schematic of an SHG-FROG device

$$I_{FROG}(\omega, \tau) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} E_{sig}(t, \tau) \exp(-i\omega t) dt \right|^2 \quad (2)$$

信号场的 FROG 迹线可以表示为

$$I_{FROG}^{SHG}(\omega, \tau) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} E(t) E(t - \tau) \exp(i\omega t) dt \right|^2 \quad (3)$$

在图象处理技术中, 二维相位恢复问题是依据信号(图象)的傅里叶变换幅度重建二维信号(图象)<sup>9</sup>. 如果在式(2)中, 信号场用  $E_{sig}(t, \tau)$  关于时间延迟  $\tau$  的傅里叶变换  $E_{sig}(t, \Omega)$  替换, 那么 FROG 迹线的数学表达式表示为

$$I_{FROG}(\omega, \tau) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} E_{sig}(t, \Omega) \cdot \exp(-i\omega t - i\Omega\tau) dt d\Omega \right|^2 \quad (4)$$

由式(4)知, 给定 FROG 迹线求解  $E_{sig}(t, \Omega)$  的过程属于二维相位恢复问题. 一般情况下, 二维相位恢复问题具有唯一解<sup>9</sup>, 而且由  $E_{sig}(t, \Omega)$  求解  $E(t)$  也较容易, 因此, 一定的 FROG 迹线可以唯一确定待测的脉冲电场, 从实验测量的 FROG 迹线可以唯一获得待测脉冲的振幅和相位.

迭代傅里叶变换算法(IFT)是二维相位恢复的基本算法<sup>9</sup>, 用于超短脉冲测量时的 IFT 算法如图2所示. 首先猜测待测脉冲电场值, 得到 FROG 的非线性信号场, 将其对时间作傅里叶变换获得信号的频率域表示, 然后利用频率域限制, 用测量的 FROG 迹线的强度替换信号的强度, 再经反傅里叶变换, 得到迭代的时域信号, 最后运用时间域的限制条件, 得到一个迭代的脉冲电场值.

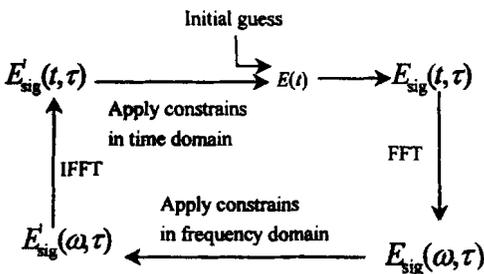


图2 FROG 的相位恢复算法图

Fig.2 Schematic of the phase retrieval algorithm for FROG

以此值作为下一次迭代的初始值, 重复此过程, 直至 FROG 迹线误差接近收敛的标准. FROG 迹线误差定义为<sup>1</sup>

$$G = \sqrt{\frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N [I_{calc}(\omega_i, \tau_j) - I_{FROG}(\omega_i, \tau_j)]^2} \quad (5)$$

式中  $I_{CALC}(\omega_i, \tau_j)$  为根据每一次迭代值  $E(t)$  计算的 FROG 迹线,  $I_{FROG}(\omega_i, \tau_j)$  为 FROG 迹线的测量值.  $G$  表示迭代的 FROG 迹线与测量的 FROG 迹线的接近程度. 对无噪音(数值模拟)的脉冲,  $G$  小于  $10^{-4}$  定义为收敛<sup>5</sup>. 典型的  $128 \times 128$  像素的 SHG-FROG,  $G$  小于<sup>4</sup>0.5%.

## 2 SHG-FROG 迹线的数值模拟

由式(3)可见, FROG 迹线的数据的采集取决于离散值  $t$  和  $\tau$ , 可以利用矩阵矢量及其外积的性质来模拟 SHG-FROG 迹线的产生. 图3为模

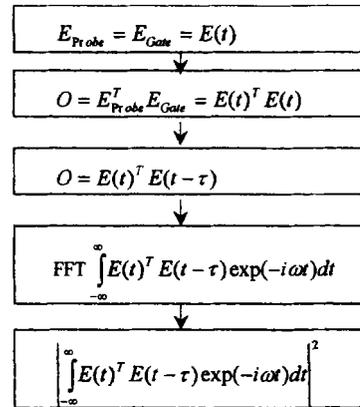


图3 用矩阵方法产生 SHG-FROG 迹线的过程

Fig.3 Procedure for generating SHG-FROG

trace using a matrix approach

拟过程的框图. 在 SHG-FROG 中探测脉冲和快门脉冲均用  $E(t)$  表示, 设脉冲在  $N$  个不同时刻采样, 时间间隔为  $\Delta t$ , 两个脉冲可以表示成长度为  $N$  的行矢量. 两个相同矢量的外积为  $O = E(t)^T E(t)$ . 上标“ $T$ ”表示共轭转置. 外积矩阵中的元素表示探测脉冲和快门脉冲的相互作用, 而且整个矩阵包含了两个脉冲在各个时刻和各种延迟情况下所有可能的相互作用. 从第二行开始对外积矩阵作行移动, 使得矩阵的每一行表示在一定时刻  $t$ 、各种时间延迟下的相互作用, 每一列则表示在相同时间延迟  $\tau$ 、不同采样时刻下的相互作用. 接着对矩阵左右两部分的列进行交换, 使  $\tau = 0$  时各时刻的相互作用位于矩阵中心,  $\tau = \pm \Delta t, \pm 2\Delta t, \dots$  分别位于左右两边. 变换后的外

积矩阵表示信号  $E_{sig}(t, \tau)$  的分布. 最后对矩阵每一列作对时间  $t$  的傅里叶变换, 取矩阵元素的强度值, 就得到频率域信号的强度分布, 即 SHG-FROG 迹线.

采用上述方法, 以高斯强度分布的变换极限

脉冲、线性啁啾脉冲、自相位调制脉冲、光谱立方相位脉冲以及双脉冲作为待测脉冲, 数值模拟了它们的SHG-FROG迹线( $N \times N = 64 \times 64$ 像素). 如图 4(a)~(e) 第一列所示. 各种脉冲的数学表达式列于表 1 中.

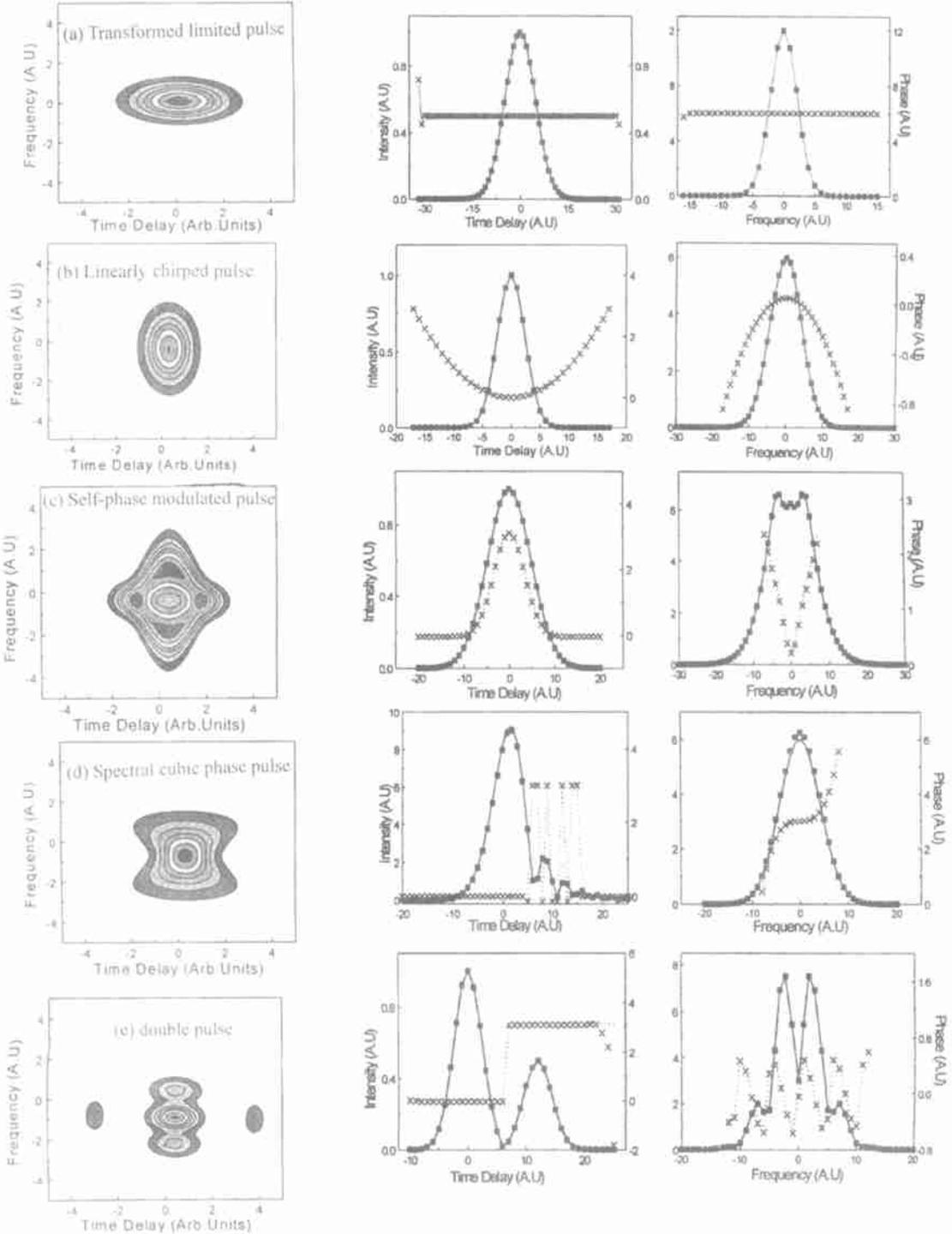


图 4 数值模拟的 SHG-FROG 迹线和脉冲振幅和相位的分布, 实线(虚线)表示数值脉冲的振幅(相位)分布.

■(×)表示恢复脉冲的振幅(相位)分布

Fig. 4 Numerically simulated SHG-FROG trace and profile of amplitude and phase of pulse, Solid (dot) curve, the amplitude (phase) of original pulse ■(×) curve, the amplitude (phase) of retrieval pulse

### 3 超短脉冲振幅和相位的恢复

目前, 基于傅里叶迭代算法形成了不同的算法方案, 它们的区别就在于由时域限制获得迭代脉冲的方法不同. 常用的广义投影(PG)算法是最小化  $E'_{sig}(t, \tau)$  与迭代脉冲的信号场之间的距离, 从而得到迭代的脉冲电场分布. 基于矩阵运算的主元素广义投影(PCGP)算法用矩阵的奇异值分解取代最小化过程. 图 5 为 PCGP 算法图. 猜测的探测脉冲  $E(t)$  和快门脉冲  $G(t)$  用行向量矩阵表示, 变换它们的外积矩阵  $O = E(t)^T G(t)$ , 得到 FROG 迹线的矩阵表示. 用测量的强度值替代其强度值, 再经反傅里叶变换得到迭代信号场的矩阵表示. 进行反向行列变换后得到迭代的外积矩阵  $O_p$ . 如果猜测值正确, 外积矩阵

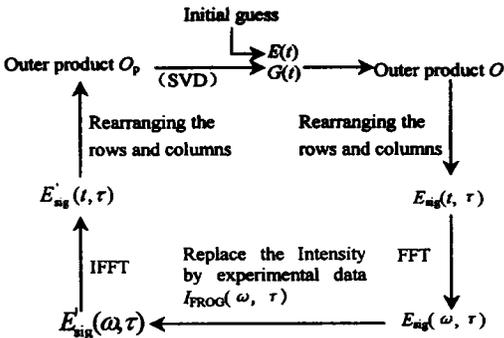


图 5 PCGP 算法

图 5 PCGP 算法

Fig. 5 Schematic of the principal component generalized projections algorithm

$O_p$  唯一的本征矢量就是探测脉冲矢量, 转置外积矩阵的唯一本征矢量就是快门脉冲矢量. 但是实际猜测值总有误差,  $O_p$  将对应  $N$  个本征矢量(对  $N \times N$  象素的迹线). 探测脉冲的最佳迭代值是这  $N$  个本征矢量的线性迭加, 而  $N$  个本征矢量则可以通过外积矩阵的奇异值分解得到

$$O_p = U \times W \times V^T \tag{6}$$

此时  $O_p$  可以看成是一系列外积矩阵的迭加, 构成外积的矢量对分别是正交方阵  $U$  和  $V^T$  的列矢量和行矢量. 每一外积矩阵的权重对应对角阵  $W$  的对角元素. 如果每一次迭代只保留具有最大权重的外积矩阵, 就可以使外积矩阵  $O_p$  和  $O$  之间的误差最小. 最大权重外积矩阵所对应的矢量对分别为迭代的探测脉冲和快门脉冲. 这一过程类似于 GP 算法种的最小化过程.

我们将 PCGP 算法用于 SHG-FROG 中, 采用 MATLAB 语言编程, 从上文数值模拟的各种 SHG-FROG 迹线中恢复脉冲的振幅和相位. 初始猜测选取高斯强度和随机相位分布的脉冲, 而且, 脉冲宽度或光谱带宽均与数值模拟脉冲不同. 对  $64 \times 64$  象素的 FROG 迹线, 基于主频 500MHz Pentium III 的 PC 机程序运行速度为 4 次迭代/s. 图 4 的第二列和第三列分别对应各种恢复脉冲的时间振幅相位分布和频率振幅相位分布. 同时, 我们将最后迭代脉冲的 FROG 迹线和数值模拟的 FROG 迹线数据代入式 (5), 计算出最后的误差  $G$ , 分别列于表 1 中.

表 1 数值模拟 SHG-FROG 迹线的脉冲及用 PCGP 算法恢复脉冲时的 FROG 迹线误差

脉冲类型	数 学 表 达 式	误差 ( $G \times 10^{-4}$ )
(a) 变换极限	$E(t) = \exp(-0.0219t^2)$	0.94
(b) 线性啁啾	$E(t) = \exp(-0.0875t^2 + i0.01t^2)$	0.75
(c) 自相位调制	$E(t) = \exp(-0.0219t^2 + i\pi  E(t) ^2)$	5.42
(d) 光谱立方相位	$E(\omega) = \exp(-0.0219\omega^2 + i0.005\omega^2)$	1.13
(e) 双脉冲	$E(t) = \exp(-0.0875t^2) + 2^{-1} \exp(-0.0875(t-12)^2 + i\pi)$	1.12

### 4 分析和结论

在 SHG-FROG 脉冲恢复的数值计算中发现, 初试猜测脉冲的选取对恢复脉冲的收敛情况, 以及收敛时的迭代次数有很大的影响. 图 6 显示了不同脉冲和不同猜测值情况下, FROG 迹线误差 ( $G$ ) 随迭代次数的变化情况. 在线性啁啾脉冲、自相位调制 (SPM) 脉冲、自相位调制和正线性啁啾脉冲的恢复算法中, 我们用相同的猜测脉冲, 发现线性啁啾脉冲的  $G$  最小达到  $0.75 \times 10^{-4}$ , 但是其迭代次数较多; SPM 脉冲收敛情况略差,  $G$  最小为  $5.42 \times 10^{-4}$ , 但其收敛时迭代仅为 80 次; 自相位调制和正线性啁啾脉冲的收敛情况和迭代次数均比较好,  $G$  最小为  $1.01 \times 10^{-4}$ . 另外, 对 SPM 脉冲, 我们又选取了具有较大随机相位的猜

测脉冲,  $G$  最小为 0.0238, 可见初始脉冲的选取, 尤其是脉冲相位的选取将影响脉冲振幅和相位的恢复. 对双脉冲,  $G$  最小为  $1.12 \times 10^{-4}$ .

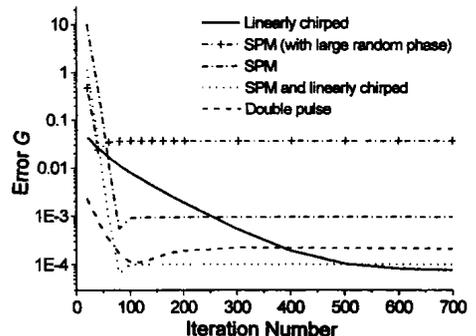


图 6 SHG-FROG 迹线误差随迭代次数的变化情况

Fig. 6 SHG-FROG error as a function of iteration number for different pulses

超短脉冲的全部特征参量对超短脉冲产生技术及其广泛的应用具有重要意义. SHG-FROG 方法结合了自相关技术的简捷与二维相位恢复算法的可靠和完备, 能够完全测量超短脉冲的振幅和

相位分布. 今后的研究工作是优化算法程序, 提高其运行速度, 充分发挥 PCGP 算法在编程上的优势. 如果将 PCGP 算法和数字信号处理技术结合, 能够完成超短脉冲的实时测量.

## 参考文献

- 1 Trebino R, Kane D J. Using retrieval to measure the intensity and phase of ultrashort pulses: frequency-resolved optical gating. *J Opt Soc Am(A)*, 1993, 10(5): 1101~ 1111
- 2 Kane D J, Trebino R. Characterization of arbitrary femtosecond pulses using frequency-resolved optical gating. *IEEE J Quantum Electron*, 1993, 29(2): 571~ 579
- 3 Delong K W, Fittinghoff D N, Trebino R. Practical issues in ultrashort laser pulses measurement using frequency resolved optical gating. *IEEE J Quantum Electron*, 1996, 32(7): 1253~ 1264
- 4 Trebino R, Delong K W, Fittinghoff D N, et al. Measuring ultrashort laser pulses in the time-frequency domain using frequency-resolved optical gating. *Rev Sci Instrum*, 1997, 68(9): 3277~ 3295
- 5 Delong K W, Trebino R. Frequency-resolved optical gating with the use of second-harmonic generation. *J Opt Soc Am(B)*, 1994, 11(11): 2206~ 2215
- 6 Taft G, Rundquist A, Murnane M M, et al. Measurement of 10-fs laser pulses. *IEEE J Quantum Electron*, 1996, 2(3): 575~ 585
- 7 Baltuska A, Pshenichnikov M S, Wiersma D A. Amplitude and phase characterization of 4.5-fs pulses by frequency-resolved optical gating. *Opt Lett*, 1998, 23(18): 1474~ 1476
- 8 Cheng Z, Furbach A, Satrania S, et al. Amplitude and chirp characterization of high-power laser pulses in the 5-fs regime. *Opt Lett*, 1999, 24(4): 247~ 249
- 9 邹谋炎. 反卷积和信号复原. 北京: 国防工业出版社, 2001: 291~ 296
- 10 Delong K W, Fittinghoff D N, Trebino R. Pulse retrieval in frequency-resolved optical gating based on the method of generalized projections. *Opt Lett*, 1994, 19(24): 2152~ 2154
- 11 Kane D J, Rodriguez G, Taylor A J, et al. Simultaneous measurement of two ultrashort laser pulses from a single spectrogram in a single shot. *J Opt Soc Am(B)*, 1997, 14(4): 935~ 943

# MEASUREMENT OF THE AMPLITUDE AND PHASE OF ULTRASHORT PULSES USING SHG-FROG

Long Jinghua<sup>1,2</sup>, Gao Jihua<sup>3</sup>, Ju Yangfeng<sup>1,2</sup>, Ruan Shuangchen<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Key Lab. of Laser Engineering Shenzhen, Shenzhen University, Shenzhen 518060

<sup>2</sup> Xi'an Institute of Optics and Precision Mechanics, Academia Sinica, Xi'an 710068

<sup>3</sup> School of Science Shenzhen University, Shenzhen 518060

Received date: 2001-12-03

**Abstract** Second harmonic generating frequency resolved optical gating (SHG-FROG) is one of techniques measuring the amplitude and the phase of ultrashort pulses. Experimental system of SHG-FROG and the two-dimension phase retrieval algorithm have been introduced. Numerically simulated SHG-FROG trace of several types of common ultrashort pulses has been generated using a matrix approach, then the amplitude and the phase of this pulses have been retrieved from these free-noise SHG-FROG traces by the principal component generalized projections (PCGP) algorithm, and the SHG-FROG error near the criterion of convergence.

**Keywords** ultrashort pulse; Measurement of pulses; Frequency resolved optical gating; Phase retrieval

**Long Jinghua** was born in 1972 and received the B. S. degree from Shaanxi Normal University, in 1993, and the M. S. degree from Northwest University, in 1999 respectively. Now, she is a PhD candidate in Xi'an Institute of Optics and Precision Mechanics. She is doing research on ultrashort pulse characterization and LD-pumped solid-state laser.

